

1) Deux Lois discrètes. 2) Vers une approche des lois continues

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module: Traitement numérique des données

- 1 Deux Lois discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

1 Deux Lois discrètes

- Loi de Bernoulli
- Loi Binomiale
- Exercices

2 Vers une approche des lois continues

- Une nouvelle notation pour l'aire
- Une application en probabilité
- Un exemple : les lois Normales
- La loi normale comme limite en loi
- Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor

3 Vers les intervalles de confiance

- Concentration autour de la moyenne des lois Normales
- Vers les intervalles de confiance

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \rightarrow \{0; 1\}$$

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \rightarrow \{0; 1\}$$

Elle est caractérisée par un paramètre p , qui représente la probabilité que la v.a prenne la valeur 1.

Loi Bernoulli

Une v.a X pouvant prendre 2 valeurs : 0 et 1, suit une loi de Bernoulli.

$$X : \Omega \rightarrow \{0; 1\}$$

Elle est caractérisée par un paramètre p , qui représente la probabilité que la v.a prenne la valeur 1.

Loi de X

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

On dit et on note $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Exemple de base

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé.

Exemple de base

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de base

On lance un pièce biaisée. On suppose que la proba d'obtenir "pile" est un nombre $p \in [0; 1]$ fixé. Soit

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors X suit une Bernoulli(p).

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + (1 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 1), \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p, \\ &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Propriétés de la loi de Bernoulli

Si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (0 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + (1 - p)^2 \times \mathbb{P}(X = 1), \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p, \\ &= p(1 - p). \end{aligned}$$

Proposition (Espérance et variance d'une *Bernoulli*(p))

$$\mathbb{E}[X] = p,$$

$$V[X] = p(1 - p).$$

Exemples

On lance un dé équilibré et on considère la variable gain G qui rapporte 1 euro si on obtient un 5 et rien sinon.

Exemples

On lance un dé équilibré et on considère la variable gain G qui rapporte 1 euro si on obtient un 5 et rien sinon.
Loi de G ?

Exemples

On lance un dé équilibré et on considère la variable gain G qui rapporte 1 euro si on obtient un 5 et rien sinon.
Loi de G ?

$$G \sim \text{Bernoulli}(1/6)$$

Exemples

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 si c'est une verte.

Exemples

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 si c'est une verte.

Loi de X ?

Exemples

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est bleue, et 0 si c'est une verte.

Loi de X ?

$$X \sim \text{Bernoulli}(2/5)$$

- 1 Deux Lois discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :

- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :

- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Conséquence : $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Définition intuitive

Une v.a suit une loi binomiale, si elle compte le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques ayant 2 issues : succès et échec.

Cette loi de probabilité discrète est donc décrite par deux paramètres :

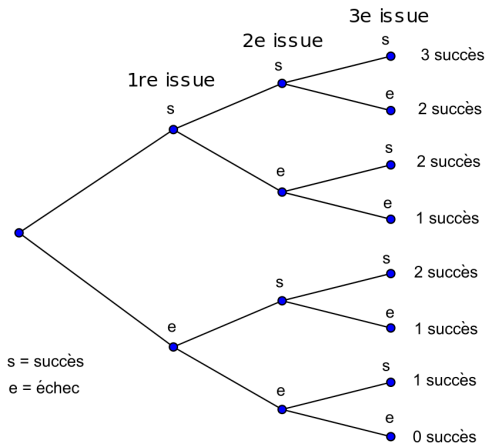
- n le nombre d'expériences réalisées,
- p la probabilité de succès.

Conséquence : $X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Notation : $X \sim \text{Binomiale}(n, p)$

Exemple

On joue 3 fois à un pile ou face.



Définition mathématique

Définition

Si X peut s'écrire ainsi :

$$X = X_1 + \dots + X_k + \dots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli(p) indépendantes. Alors X suit une Binomiale(n, p).

Définition mathématique

Définition

Si X peut s'écrire ainsi :

$$X = X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli(p) indépendantes. Alors X suit une Binomiale(n, p).

Explications :

Définition mathématique

Définition

Si X peut s'écrire ainsi :

$$X = X_1 + \dots + X_k + \dots + X_n$$

où les X_k sont des variables aléatoires de Bernoulli(p) indépendantes. Alors X suit une Binomiale(n, p).

Explications :

D'une certaine manière, en mathématiques, mais certainement aussi ailleurs,
il n'y a rien de plus difficile que la simplicité. [L. L.]

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ème}} \text{ lancé.}$$

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ième}} \text{ lancé.}$$

Soit X le nombre de "Piles" obtenus au cours des n lancers indépendants de la pièce.

Exemple de base

On joue n fois au pile ou face. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{au } i^{\text{ième}} \text{ lancé.}$$

Soit X le nombre de "Piles" obtenus au cours des n lancers indépendants de la pièce.

Alors,

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

et X suit une loi binomiale *Binomiale*(n, p).

Calcul des probabilités d'une binomiale

Proposition

Soit X une v.a qui suit une loi binomiale Binomiale(n, p). Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Calcul des probabilités d'une binomiale

Proposition

Soit X une v.a qui suit une loi binomiale Binomiale(n, p). Pour tout $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Preuve :

Remarque

On a bien, en utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[X = k] &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= (p + 1 - p)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Paramètres d'une binomiale

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = np,$$

$$V[X] = np(1 - p).$$

Paramètres d'une binomiale

Proposition (Espérance et variance)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np, \\ V[X] &= np(1 - p).\end{aligned}$$

Remarque

Comprendre la formule de l'espérance

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.

Quelle est la loi de Y ?

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.

Quelle est la loi de Y ?

$$Y \sim \text{Binomiale}(5; 2/5)$$

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.

Quelle est la loi de Y ?

$$Y \sim \text{Binomiale}(5; 2/5)$$

Que vaut selon vous l'espérance de Y sans calcul ? Vérifier votre résultat avec la formule ?

Intuition sur la formule de l'espérance

Une urne contient deux boules bleues et trois vertes.



Supposons que l'on tire 5 fois une boules avec remise après chaque lancé, et que l'on appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues tirées.

Quelle est la loi de Y ?

$$Y \sim \text{Binomiale}(5; 2/5)$$

Que vaut selon vous l'espérance de Y sans calcul ? Vérifier votre résultat avec la formule ? On s'attend à obtenir en moyenne 2 bleues si on pioche 5 fois une boule...Et la formule donne bien $\mathbb{E}(Y) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Preuve :

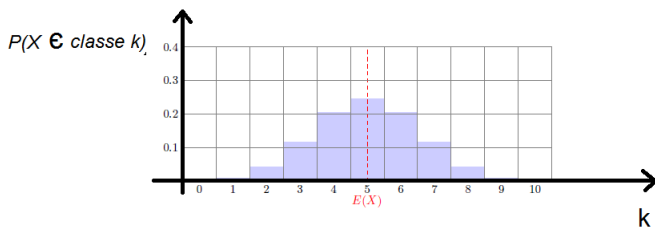
On a l'écriture $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k + \dots + X_n$, ou les X_k sont n variables aléatoires de Bernoulli *indépendantes*. On a en effet par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \dots + \mathbb{E}[X_k] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \mathbb{E}[X_1] = n \cdot p$$

et par **indépendance** des variables aléatoires $(X_k)_{k=1\dots n}$

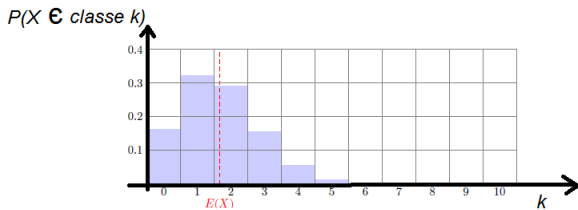
$$V[X] = V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_k] + \dots + V[X_n] = n \cdot V[X_1] = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Allure d'une Binomiale



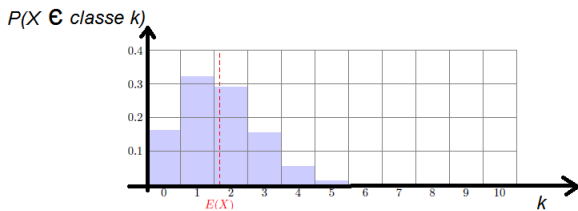
Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$

Allure d'une Binomiale



Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$

Allure d'une Binomiale



Loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$

Allure d'une Binomiale

Garder en tête ces schémas, pour une approximation en loi d'une binomiale...

Exemples et Exercices

Exemple :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

Exemples et Exercices

Exemple :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins.

Exemples et Exercices

Exemple :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins.

Quelle est la probabilité des événements suivant :

A : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent»

B : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent»

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent.

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \text{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \text{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre } i \text{ est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \text{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre } i \text{ est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim \text{Bernoulli}(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \text{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre } i \text{ est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim \text{Bernoulli}(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.
- Enfin, on a :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \text{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre } i \text{ est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim \text{Bernoulli}(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.
- Enfin, on a :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Binomiale}(4 ; 3/5)$$

Exemple

Soit X la v.a désignant le nombre de lettres envoyées parmi les quatre en tarif urgent. Montrons que $X \sim \text{Binomiale}(4, \frac{3}{5})$.

- Pour $1 \leq i \leq 4$, on pose :

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{si la lettre } i \text{ est envoyée en tarif urgent} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On a $X_i \sim \text{Bernoulli}(3/5)$ et les X_i sont indépendantes.
- Enfin, on a :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Binomiale}(4 ; 3/5)$$

Exemple

L'événement A correspond à $\{X = 2\}$.

Exemple

L'événement A correspond à $\{X = 2\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X = 2), \\ &= \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2, \\ &= 6 \times \frac{3^2 \times 2^2}{5^4}, \\ &= \frac{216}{5^4}.\end{aligned}$$

Exemple

L'événement B correspond à $\{X \geq 1\}$.

Exemple

L'événement B correspond à $\{X \geq 1\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(X \geq 1), \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 1), \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0), \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4\end{aligned}$$

- 1 Deux Lois discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

Exercice 1

Exo 1

Une fabrication automatique de pièces donne un pourcentage de rebuts s'élevant à 5%. On considère un échantillon de 10 pièces issues de cette fabrication. Calculer la probabilité de trouver dans cet échantillon exactement 2 rebuts ? au plus 2 rebuts ?

Exercice 2

Exo 2

Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi les 20".

- 1 Quelle est la loi de X ? Justifier
- 2 Quelle est son espérance, son écart-type ?
- 3 Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 3

Exo 3

Un tireur vise une cible avec une chance sur deux de la toucher. Combien doit-il tirer de coups afin que la cible soit atteinte avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?

Exercice 4

Exo 4

Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coût de fabrication est de 160 euros par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués. Le test est positif dans 93% des cas et une console de jeux reconnue conforme peut alors être vendue 290 euros. Si le test est en revanche négatif, la console de jeux est bradée au prix de 150 euros.

- 1 On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de consoles de jeux conformes parmi les 400 produites. Calculer l'espérance de X .
- 2 On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat.

- 1 Deux Lois discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

1 Deux Loïs discrètes

- Loi de Bernoulli
- Loi Binomiale
- Exercices

2 Vers une approche des lois continues

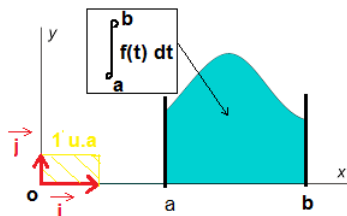
- Une nouvelle notation pour l'aire
- Une application en probabilité
- Un exemple : les lois Normales
- La loi normale comme limite en loi
- Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor

3 Vers les intervalles de confiance

- Concentration autour de la moyenne des lois Normales
- Vers les intervalles de confiance

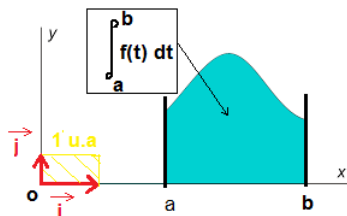
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Soit C_f sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On appelle intégrale de f entre a et b , et on note $\int_a^b f(t) dt$, l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe (Ox) , et les 2 droites $x = a$ et $x = b$.



Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Soit C_f sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On appelle intégrale de f entre a et b , et on note $\int_a^b f(t) dt$, l'aire (en unités d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe (Ox) , et les 2 droites $x = a$ et $x = b$.



Remarque

La variable t est muette. $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du.$

Remarque

La variable t est muette. $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du.$

Exemples

- 1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5$. Calculer $\int_1^3 f(x) dx$.
- 2 Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = x$. Calculer $\int_0^4 g(x) dx$.
- 3 Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $h(x) = 2x + 1$. Calculer $\int_1^3 h(x) dx$.

1 Deux Lois discrètes

- Loi de Bernoulli
- Loi Binomiale
- Exercices

2 Vers une approche des lois continues

- Une nouvelle notation pour l'aire
- **Une application en probabilité**
- Un exemple : les lois Normales
- La loi normale comme limite en loi
- Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor

3 Vers les intervalles de confiance

- Concentration autour de la moyenne des lois Normales
- Vers les intervalles de confiance

V.a continues

Définition

Il existe des v.a qui peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle (y compris \mathbb{R}). De telles v.a sont dites v.a continues.

V.a continues

Définition

Il existe des v.a qui peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle (y compris \mathbb{R}). De telles v.a sont dites v.a continues.

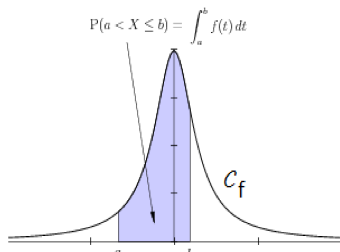
Exemple :

Soit T la v.a indiquant la température à l'université, un jour au hasard.

Densité

La loi de ce type de v.a X peut être "codée" par une fonction f positive définie sur \mathbb{R} de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f(x) dx.$$

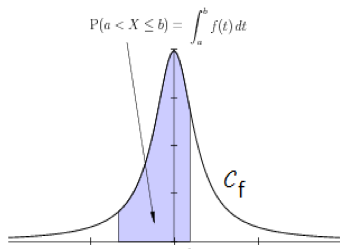


Densité

La loi de ce type de v.a X peut être "codée" par une fonction f positive définie sur \mathbb{R} de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f(x) dx.$$

On dit que f est une **densité** de la v.a X .

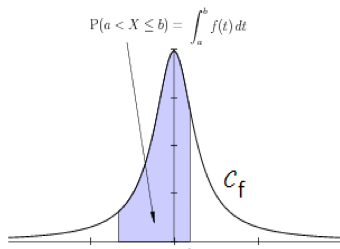


Densité

La loi de ce type de v.a X peut être "codée" par une fonction f positive définie sur \mathbb{R} de la manière suivante :

$$\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f(x) dx.$$

On dit que f est une **densité** de la v.a X .



Remarque

- 1 Nécessairement, la fonction f (la densité de X) doit être positive et son aire totale sous la courbe doit valoir 1.

$$\text{ie : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

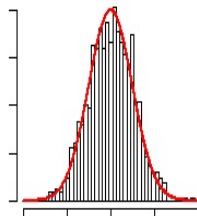
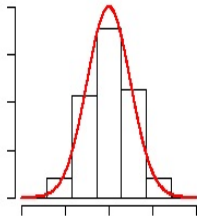
Remarque

- 1 Nécessairem^{ent}, la fonction f (la densité de X) doit être positive et son aire totale sous la courbe doit valeur 1.

$$\text{ie : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

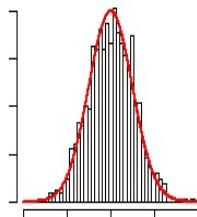
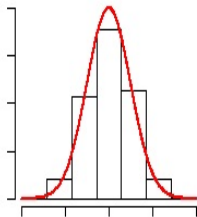
- 2 La densité f est l'équivalent continu du "tableau" dans le cas discret.

Approche plus naturelle des densités comme limite d'histogramme



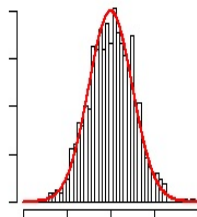
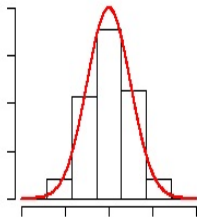
Approche plus naturelle des densités comme limite d'histogramme

- *Origine de ces points de vue* : histogramme des fréquences d'une série regroupée par classe dont l'amplitude des classes devient "petites"...



Approche plus naturelle des densités comme limite d'histogramme

- *Origine de ces points de vue* : histogramme des fréquences d'une série regroupée par classe dont l'amplitude des classes devient "petites"...



Un exemple pédagogique

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- 1 Montrer que f est une densité de probabilité.
- 2 Soit X une variable aléatoire de densité f . Calculer
 - a $\mathbb{P}(X \geq 0)$.
 - b $\mathbb{P}(X \geq 0.5)$.
 - c $\mathbb{P}(X \in [-0,8; 0,2])$.
 - d $\mathbb{P}(X = -0,4)$.

Question 1

f est une densité ssi

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1 \right\}$.

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1 \right\}$.

- On a bien $f \geq 0$.

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1 \right\}$.

- On a bien $f \geq 0$.
- Par ailleurs, on a successivement

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \mathcal{A}_{\text{triangle}} = 1$$

Question 1

f est une densité ssi $\left\{ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1 \right\}$.

- On a bien $f \geq 0$.
- Par ailleurs, on a successivement

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \mathcal{A}_{\text{triangle}} = 1$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

Remarque

Plus tard, on pourra montrer que l'intégrale vaut 1, par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t) dt &= \int_{-1}^0 1+t dt + \int_0^1 1-t dt, \\ &= \left[\frac{(1+t)^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{-(1-t)^2}{2} \right]_0^1, \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Question 2

1 Deux Lois discrètes

- Loi de Bernoulli
- Loi Binomiale
- Exercices

2 Vers une approche des lois continues

- Une nouvelle notation pour l'aire
- Une application en probabilité
- **Un exemple : les lois Normales**
- La loi normale comme limite en loi
- Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor

3 Vers les intervalles de confiance

- Concentration autour de la moyenne des lois Normales
- Vers les intervalles de confiance

Découverte, vers la Loi Normale

Si vous jetez sur le papier une théorie qui à chaque pas est naturelle, elle va être incomparablement plus puissante qu'une théorie que vous aurez forgée par la volonté, et qui de fait, sera artificielle.

[L. Lafforgue]

Découverte, vers la Loi Normale

Si vous jetez sur le papier une théorie qui à chaque pas est naturelle, elle va être incomparablement plus puissante qu'une théorie que vous aurez forgée par la volonté, et qui de fait, sera artificielle.

Nous pouvons mesurer une théorie à sa fécondité (...)

[L. Lafforgue]

Découverte, vers la Loi Normale

Si vous jetez sur le papier une théorie qui à chaque pas est naturelle, elle va être incomparablement plus puissante qu'une théorie que vous aurez forgée par la volonté, et qui de fait, sera artificielle.

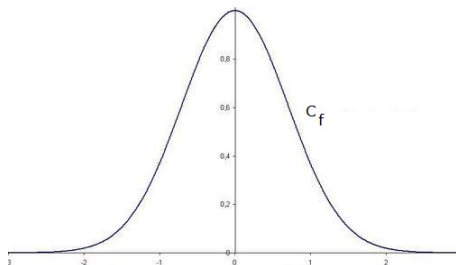
Nous pouvons mesurer une théorie à sa fécondité (...)

[L. Lafforgue]

Sens ici ?

Loi Normale centrée réduite

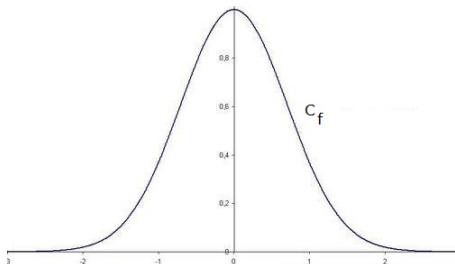
- (une) origine : Binomiale avec n grand (histogramme)



Loi Normale centrée réduite

- (une) origine : Binomiale avec n grand (histogramme)
- Concrètement : la v.a X suit une loi Normale (centrée réduite) si sa densité est

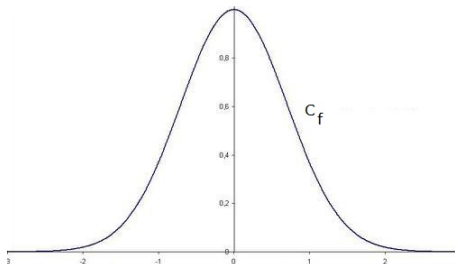
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Loi Normale centrée réduite

- (une) origine : Binomiale avec n grand (histogramme)
- Concrètement : la v.a X suit une loi Normale (centrée réduite) si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



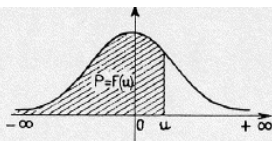
Loi Normale

- Il existe des tables qui donnent les aires, et donc les probabilités (cf : TD)

Loi Normale

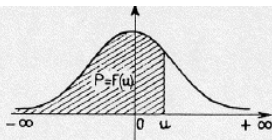
- Il existe des tables qui donnent les aires, et donc les probabilités (cf : TD)
- La notation est $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Table de la loi normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

Table de la loi normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

On lit par exemple $\mathbb{P}(X \leq 0,64) = 0,7389$.

Loi Normale générale

Loi normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Loi normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente.

Loi normale générale

On dit que X suit une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, si la densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant :

Loi normale générale

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

alors Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi normale générale

Théorème

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

alors Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Attention, certains auteurs utilisent la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et pas $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Paramètres

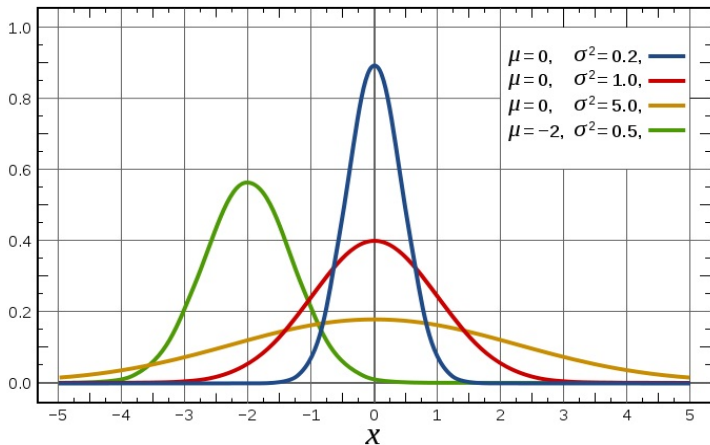
On a également :

Proposition (Espérance et variance)

$$\mathbb{E}[X] = \mu,$$

$$V(X) = \sigma^2.$$

Allure de la densité en fonction de μ et σ



Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$

Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$
($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)

Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$
($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)
Et soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

Manipulation de la loi normale

Considérons X une v. a. qui suit une loi $\mathcal{N}(6, 2)$

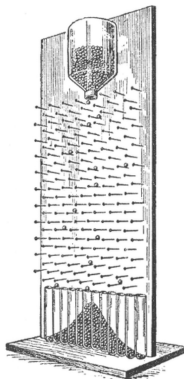
($\sigma(X)$ vaut donc ici 2 et $\mathbb{E}(X) = 6$)

Et soit Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a par exemple

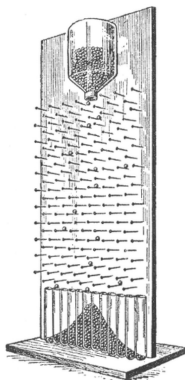
$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq 7] &= \mathbb{P}\left[\frac{X - 6}{2} \leq \frac{7 - 6}{2}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{1}{2}\right] \\ &= 0.6915.\end{aligned}$$

- 1 Deux Loïs discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi**
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

La planche de Galton



La planche de Galton



"La somme de hasard est un hasard contrôlé"

La loi normale comme limite en loi

Proposition

Soit S_n binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Si $n \geq 30$, $n \cdot p \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) > 5$, on peut approximer la loi de S_n par une loi Normale. Plus précisément, on a :

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np; \sqrt{npq}).$$

La loi normale comme limite en loi

Proposition

Soit S_n binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Si $n \geq 30$, $n \cdot p \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) > 5$, on peut approximer la loi de S_n par une loi Normale. Plus précisément, on a :

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(np; \sqrt{npq}).$$

Remarquez que cette propriété peut également s'énoncer ainsi :

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} U,$$

où $U \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

La loi normale comme limite en loi

- Cette propriété est une conséquence du Théorème central limite que l'on abordera plus tard.

La loi normale comme limite en loi

- Cette propriété est une conséquence du Théorème central limite que l'on abordera plus tard.
- Ne pas confondre l'approximation de la loi de poisson par une binomiale et celle de la loi normale !!!

- 1 Deux Lois discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

Loi du Khi-deux

Définition

Soient X_1, \dots, X_n des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Posons

$$Z = \sum_{i=1 \dots n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Loi du Khi-deux

Définition

Soient X_1, \dots, X_n des v.a indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Posons

$$Z = \sum_{i=1 \dots n} X_i^2,$$

par définition la v.a. Z suit une loi du khi-deux à n degré(s) de liberté (abréviation d.d.l.). On la note $\chi^2(n)$.

Quelques Propriétés :

- $Z \geq 0$, cette loi n'est donc pas symétrique,
- Z admet une densité,
- $\mathbb{E}(Z) = n$ et $\text{Var}(Z) = 2n$

Allure de la densité d'un χ^2

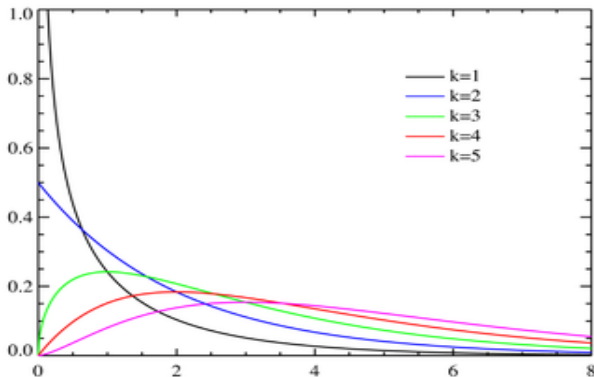


FIGURE: Densité de la loi $\chi^2(k)$.

Loi de Student

Définition

Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$. Posons $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$. Alors T suit une loi de Student à n degré de liberté et on la note $\mathcal{T}(n)$ ou Student(k)

Allure de la densité de Student

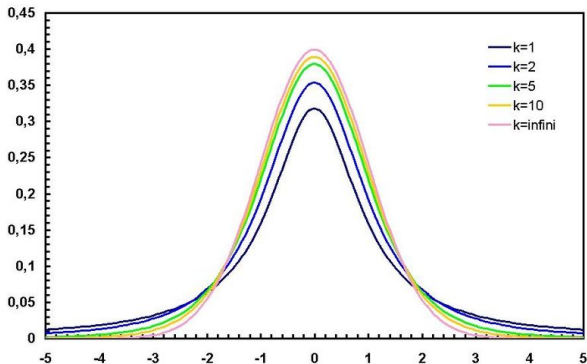


FIGURE: Densité de la loi de *Student*(n).

Loi de Fisher-Snedecor

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \chi^2(n)$ et $Y \sim \chi^2(m)$. Alors, on dit que la variable

$$Z = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

suit une loi de Fisher-Snedecor(n, m). On la note $\mathcal{F}(n, m)$

Allure de la densité de Fisher-Snedecor

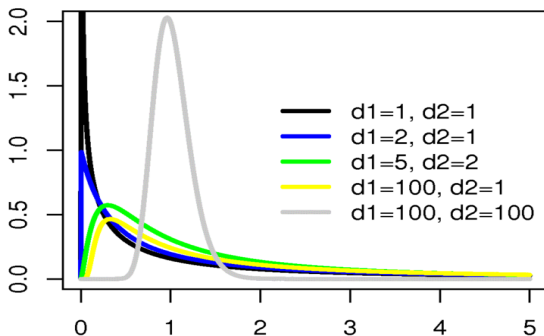


FIGURE: Densité de la loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(d_1, d_2)$.

Ces trois dernières loïs seront utiles dans la théorie des tests.

Ces trois dernières loïs seront utiles dans la théorie des tests. L'expression explicite des densités de ces loïs n'est pas à connaître (sauf pour la loi normale). Des tables statistiques et des logiciels permettent de les manipuler.

- 1 Deux Loïs discrètes
 - Loi de Bernoulli
 - Loi Binomiale
 - Exercices
- 2 Vers une approche des lois continues
 - Une nouvelle notation pour l'aire
 - Une application en probabilité
 - Un exemple : les lois Normales
 - La loi normale comme limite en loi
 - Quelques lois classiques dérivées de la loi normale : χ^2 , Student, Fisher-Snedecor
- 3 Vers les intervalles de confiance
 - Concentration autour de la moyenne des lois Normales
 - Vers les intervalles de confiance

Concentration autour de la moyenne pour une loi NORMALE

Dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}[m - \sigma \leq X \leq m + \sigma] = 0.68$$

Concentration autour de la moyenne pour une loi NORMALE

Dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}[m - \sigma \leq X \leq m + \sigma] = 0.68$$

On établit aussi que 95% d'un échantillon représentatif d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ est approximativement situé entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$. Plus exactement,

$$\mathbb{P}[m - 1.96\sigma \leq X \leq m + 1.96\sigma] = 0.95$$

Concentration autour de la moyenne pour une loi NORMALE

Dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$ de longueur 2σ et centré autour de la moyenne, on peut calculer qu'il y a 68% des individus, lorsque qu'une v.a. suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}[m - \sigma \leq X \leq m + \sigma] = 0.68$$

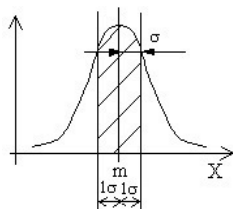
On établit aussi que 95% d'un échantillon représentatif d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ est approximativement situé entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$. Plus exactement,

$$\mathbb{P}[m - 1.96\sigma \leq X \leq m + 1.96\sigma] = 0.95$$

et on a même 99,7% des individus entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$:

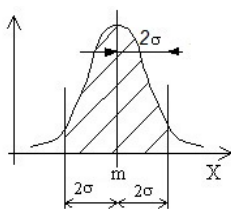
$$\mathbb{P}[m - 3\sigma < X < m + 3\sigma] = 0.997$$

Concentration autour de la moyenne



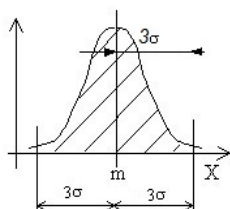
environ 68% des individus
sont compris dans l'intervalle

$$[m - \sigma ; m + \sigma]$$



environ 95% des individus
sont compris dans l'intervalle

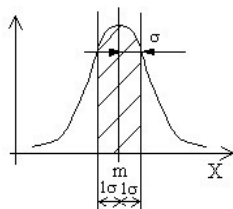
$$[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$$



environ 99,8% des individus
sont compris dans l'intervalle

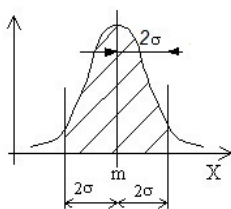
$$[m - 3\sigma ; m + 3\sigma]$$

Concentration autour de la moyenne



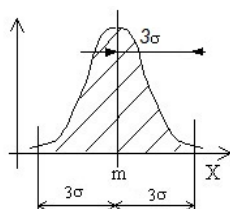
environ 68% des individus
sont compris dans l'intervalle

$$[m - \sigma ; m + \sigma]$$



environ 95% des individus
sont compris dans l'intervalle

$$[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$$



environ 99,8% des individus
sont compris dans l'intervalle

$$[m - 3\sigma ; m + 3\sigma]$$

Autrement dit, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on est "pratiquement sûr" que la valeur se situera entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$.

Concentration autour de la moyenne

Souvent, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on utilise l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, pour localiser la valeur la plus probable (à 95%) de la variable. Tout cela est à la base de la théorie des stats/tests...

Concentration autour de la moyenne

Souvent, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on utilise l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, pour localiser la valeur la plus probable (à 95%) de la variable. Tout cela est à la base de la théorie des stats/tests...

*"J'aimerais vivre dans le pays **Théorie**..."*

Concentration autour de la moyenne

Souvent, lorsque l'on a une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on utilise l'intervalle $[m - 2\sigma; m + 2\sigma]$, pour localiser la valeur la plus probable (à 95%) de la variable. Tout cela est à la base de la théorie des stats/tests...

*"J'aimerais vivre dans le pays **Théorie**... car en **Théorie** tout se passe bien !"*

Définition d'un intervalle de confiance

Définition

Soit θ un paramètre inconnu, et $0 < \alpha < 1$. On dit que $[a; b]$ est un intervalle de confiance (IC) de θ au seuil de sécurité $1 - \alpha$, si :

$$\mathbb{P}(\theta \in [a; b]) \geq 1 - \alpha.$$

Définition d'un intervalle de confiance

Définition

Soit θ un paramètre inconnu, et $0 < \alpha < 1$. On dit que $[a; b]$ est un intervalle de confiance (IC) de θ au seuil de sécurité $1 - \alpha$, si :

$$\mathbb{P}(\theta \in [a; b]) \geq 1 - \alpha.$$

Par exemple, l'intervalle $[-2; 2]$ est un IC au niveau 0,95 pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En effet, nous venons de voir que :

$$\mathbb{P}[-1.96 \leq X \leq 1.96] = 0.95$$

Définition d'un intervalle de confiance

Définition

Soit θ un paramètre inconnu, et $0 < \alpha < 1$. On dit que $[a; b]$ est un intervalle de confiance (IC) de θ au seuil de sécurité $1 - \alpha$, si :

$$\mathbb{P}(\theta \in [a; b]) \geq 1 - \alpha.$$

Par exemple, l'intervalle $[-2; 2]$ est un IC au niveau 0,95 pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En effet, nous venons de voir que :

$$\mathbb{P}[-1.96 \leq X \leq 1.96] = 0.95$$

IC

- Assez souvent, les IC seront centrés en l'espérance du paramètre (ou de la v.a).

IC

- Assez souvent, les IC seront centrés en l'espérance du paramètre (ou de la v.a).
- Par exemple, si $Y \sim \mathcal{N}(5, 2)$, on a :
l'intervalle $[3; 7]$ est un IC au niveau 0,68 pour Y , centré en $\mathbb{E}(Y) = 5$.

IC

- Assez souvent, les IC seront centrés en l'espérance du paramètre (ou de la v.a).
- Par exemple, si $Y \sim \mathcal{N}(5, 2)$, on a :
l'intervalle $[3; 7]$ est un IC au niveau 0,68 pour Y , centré en $\mathbb{E}(Y) = 5$.
- Les IC sont souvent élaborés à partir d'un échantillon (sondage), en vue notamment de fournir une estimation de paramètres statistiques comme la moyenne, la médiane ou la variance... L'obtention générale d'IC découlera de théorème limite (cf chap suivant).